

# 研究レポート No.8 ～フーリエ解析と波形の特徴量～

2020年10月21日 株式会社アイズファクトリー <https://bodais.com/company/>

## 概要

フーリエ解析は、波として表現される様々な現象を周波数成分に分解し、その特徴を分析するための手法である。その歴史は古く熱伝導の研究に端を発し、画像解析、音声認識、地震波の解析、非破壊検査、医療検査（心拍、CT画像）など様々な分野で幅広く応用されており、現代において欠かせない技術のひとつとなっている。本稿では、フーリエ解析の適用事例を通して、波形分析の特徴量について概説する。

## 1. はじめに

フーリエ解析とは、様々な複雑な現象を周波数成分として分解してその特徴を分析する手法である。光をプリズムに当てると波長ごとの屈折率の違いにより7色の光に分解され、どの成分が強く含まれるかによって光の特徴が調べられるように、フーリエ解析でも、周波数成分に分解し、成分ごとの強さを調べることで、様々な現象を分析することができる。

フーリエ解析はその名の通り、フーリエによって発展された分野である。フーリエが熱伝導の研究をする中で発展させた。当時は数学的な証明はなされていなかったが、現代ではその正しさが証明され、現代科学において欠かせない存在となっている[1]。

フーリエ解析は「波」として表現可能なデータであれば、どれだけ複雑な現象に対しても有効な手法である。音・光・振動など、波として表現されるデータは多く、画像の特徴抽出や音声データの分析、地震波の分析など、様々な分野で応用されている。画像の特徴抽出では、画像の輝度を平面波とみなし分析することで、周波数ごとの特徴が抽出できる。画像の特徴抽出は、医療現場におけるCT検査にも活用されている。音声データの分析では、周波数成分から子音や母音を分析し音声認識をすることができる。また、地震の分析では、地震波に対して構造物がどのように振舞うかを調べるために利用されている。このように、フーリエ解析には様々な応用事例が存在するが、本稿では非破壊検査と心拍分析への適用例を紹介し、その有用性を簡潔に説明する。

## 2. フーリエ変換

フーリエ変換は以下の式で定義される[2]。

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (1)$$

$f(t)$ が元の波形データを表し、 $F(\omega)$ が周波数成分に分解されたデータを表す。ここで $t$ は時間を表すパラメータ、 $\omega$ は角周波数を表すパラメータである。フーリエ変換は流儀ごとに定義が様々存在するが、本稿ではこれをフーリエ変換の定義とする。先のプリズムの例において、プリズムにより波長ごとに分解された光をスペクトルと呼ぶのと同様に、変換された $F(\omega)$ をスペクトルという。

フーリエ級数展開を考えるとフーリエ変換が理解しやすい。フーリエ級数展開は周期関数に適用可能な表現方法で、以下で定義される[2]。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad (2)$$

時間 $t$ の関数を三角関数の和として表現するのである。三角関数の和として表現できると、周波数と振幅の組 $(n, a_n)$ 、 $(n, b_n)$ を得ることができ、時間 $t$ の関数から周波数ごとの振幅の大きさがわかる。フーリエ級数展開は周期関数にのみ有効な方法であるが、これを非周期関数に拡張したものがフーリエ展開となる。

## 3. 高速フーリエ変換

自然現象として観測される波は、連続的なデータとして得られる。式(1)に示したフーリエ変換によって、無限区間上で連続なデータを分析することが理想的であるが、現実的にはそうはいかない。実際のコンピュータ上では有限なデータしか処理することができず、よって連続的なデータも扱うことはできない。そこで、連続データをサンプリングして離散的なデータに変換する。この離散化されたデータに対して式(1)のフーリエ変換は使えず、新たに離散的なデータに対して有効なフーリエ変換が必要になる。これを離散フーリエ変換(DFT)といい、次で定義される[3]。

$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-\frac{2\pi i}{n} j k} \quad (3)$$

式(3)を見るとわかるように、この式に従って計算をすると $O(n^2)$ の計算量が必要になり、効率的とは言えない。そこで実際には高速フーリエ変換(FFT)と呼ばれる、離散フーリエ変換の高速化手法が用いられている。高速フーリエ変換をもちいると計算量が $O(n \log n)$ に削減できる[3]。

## 4. テラヘルツを用いた非破壊検査

フーリエ変換の応用事例の一つとして、テラヘルツ波を利用した非破壊検査がある。テラヘルツ波というのは電磁波の一種で0.1~10THzの周波数を持ち、電波と光の境界領域に存在している(図1)。テラヘルツ波には2つの特徴がある。1つは透過性である。透過性の性質はエックス線と似ているが、エックス線のように被爆の危険性がなく、また、エックス線ほど透過性は高くないため、ソフトマテリアルの構造まで調べることができる[5,6]。2つ目は、周波数が物質を構成する分子の振動数と一致するという性質で、テラヘルツ波の周波数から物質の構造を調べることができる[6]。これらの特徴を利用して、非破壊検査に応用されている。

非破壊検査では、検査対象にテラヘルツパルス波を投入し、反射、あるいは透過したテラヘルツ波を計測し解析する。このように反射光・透過光を分解し、解析を行う手法を分光法という。テラヘルツを用いた非破壊検査では、「テラヘルツ時間領域分光法(THz-TDS)」という手法を用いて波長の計測を行う。THz-TDSは近年開発された計測手法で、テラヘルツ波が注目を集めた要因の一つとなっている[7]。

図2(左)はテラヘルツ波を用いてある物質中の異物を

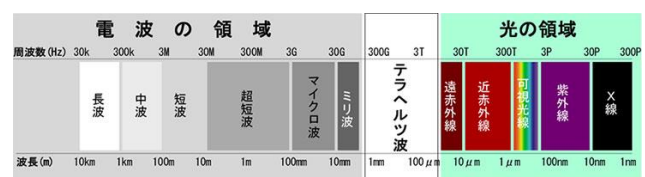


図1 テラヘルツ領域 (出典:[4])

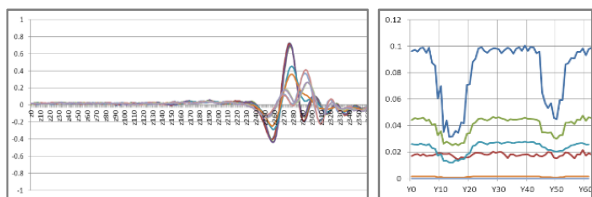


図 2 ある物質に対するテラヘルツ波の透過波(左)とその電界分布と PSD (右)

観測したときの波形のデータである。横軸は時間を表しており、複数の波形は観測された位置ごとの波形を表している。異物が存在しない場合、グラフ中の複数の波はほとんど重なることなく重なるはずであるが、このデータでは波形にずれが生じていることが確認できる。このデータに対してフーリエ変換を用いると電界とパワースペクトル密度 (PSD) の分布が求められる。電界は平面波の和として表現できる[8]という性質を利用すると、電界の分布はフーリエ変換によって求められる。PSD とは観測波の単位時間当たりの平均エネルギーのことで、式(1)における $f$ の PSD は以下で定義される[2]。

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(\omega)|^2}{T} \quad (4)$$

図 2 (右) は図 2 (左) の観測波から得られた電界と PSD の分布である。横軸は位置座標を表し、縦軸が電界と PSD の強度を表す。電界の分布のグラフを見ると、ところどころ凹みが観測できるが、これらは異物が検出された位置を表している。フーリエ変換を用いて電界の分布を調べることによって、電磁波の観測データだけではわからなかった、異物の位置まで測定することができた。

## 5. 心拍変動の分析

心拍変動の分析にもフーリエ解析は利用されている。心拍変動を解析することで自律神経のバランスを調べることができる。心拍変動から、HF や LF と呼ばれる成分を分析し、自律神経バランスを調べる。HF とは高周波 (High Frequency) 成分のことで、副交感神経が緊張しているときのみ心拍変動に現れる。LF とは低周波 (Low Frequency) 成分のことで、LF は交感神経、副交感神経のどちらが緊張しているときにも心拍変動に表れる。この HF と LF の比 LF/HF をストレス指標として自律神経のバランスを測定することができる [9]。

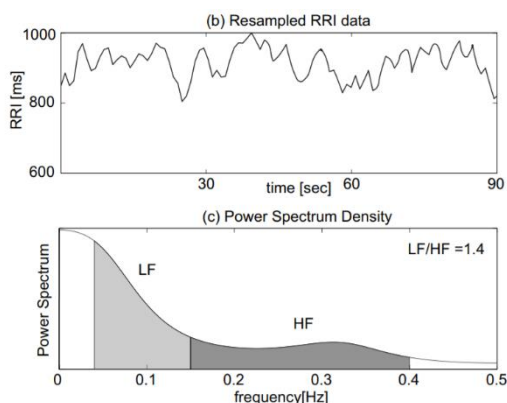


図 3 RRI データ (上) とその PSD (下) (出典: [10])

この HF や LF を心拍変動から測定するときにはフーリエ変換が用いられている。心拍変動には一定の周期で鋭いピークが現れる。このピークを R 波とよび、R 波同士の間隔を RRI (RR Interval) と呼ぶ。図 3 (上) は、横軸を R 波が計測された時間、縦軸を前の R 波との間隔 (RRI) をとして、RRI をグラフ化したデータである。この RRI データにフーリエ変換を用いて PSD を求める。図 3 (下) は PSD のグラフである。LF はパワースペクトル密度の周波数 0.05Hz~0.15Hz、HF は周波数 0.15Hz~0.40Hz の部分の積分によって求められ、ストレス指標 LF/HF が小さい場合はリラックス状態にあると判断でき、逆に大きい場合は緊張状態にあると判定できる仕組みである。

## 6. まとめ

本稿では、フーリエ解析について解説し、テラヘルツ波を用いた非破壊検査と心拍変動の分析への応用事例を紹介し、その有用性を説明した。今回紹介した事例以外にも、フーリエ解析は様々な場所で利用されている。今回紹介したテラヘルツ波を用いた非破壊検査技術は、近年研究が盛んな分野であり、今後も様々な分野への応用が期待されている。郵便物の危険物検査、セラミックナイフなどの危険物検査、壁内部の腐食・亀裂の検査や医薬品検査など、すでに公表されているだけでも、その応用可能性は数えきれない[6]。また、心拍変動の分析事例を紹介したが、半導体技術の進歩やウェアラブルデバイスの普及により、ヘルスマニタリングへの応用が期待されている[10]。今後さらに身近な技術になっていくことだろう。

## 7. 参考文献

- [1] EnergyChord 「フーリエ解析の登場」  
[http://energychord.com/children/math\\_and\\_phys/math/four/contents/four\\_intro.html](http://energychord.com/children/math_and_phys/math/four/contents/four_intro.html)
- [2] 東京大学講義資料 地球惑星環境学基礎演習 II (2014) 「時系列解析(1)」  
<https://park.itc.u-tokyo.ac.jp/tajika/class/kiso2/fourier1.pdf>
- [3] 高橋大介 「FFT におけるキャッシュ最適化方式」スーパーコンピューティングニュース Vol.9, No. Special Issue 1 (2008)
- [4] パイオニア 研究の実例紹介 「テラヘルツイメージング」  
<https://jpn.pioneer/ja/manufacturing/crdl/fr/terahertzimaging/>
- [5] 佐々木哲郎 「テラヘルツ波イメージング」, 映像情報メディア学会誌 Vol. 67, No.6, pp. 460-464 (2013)
- [6] 深澤亮一 「分析・センシングのためのテラヘルツ技術」日刊工業新聞社 (2013)
- [7] 川瀬晃道 「テラヘルツイメージングによる非破壊検査技術」, 名大の授業 工学部/工学研究科 (2009)  
<https://ocw.nagoya-u.jp/files/197/kawase.pdf>
- [8] 平野拓一 「電磁波の平面波スペクトル分解による測面の変換」 (2003)  
[http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/pw\\_spectrum/pw\\_spectra\\_m.pdf](http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/pw_spectrum/pw_spectra_m.pdf)
- [9] 「ストレスと自律神経の化学」  
[http://hclab.sakura.ne.jp/stress\\_novice\\_LFHF.html](http://hclab.sakura.ne.jp/stress_novice_LFHF.html)
- [10] 藤原幸一 「ヘルスマニタリングのための心拍変動解析」, システム/制御/情報 Vol. 61, No. 9, pp. 381-386 (2007)